УДК 517(07)

Е.С.Гацуро, *аспирант кафедры математики БГПУ,*

В.А.Шилинец, *доцент кафедры математики БГПУ*

РАЗВИВАЮЩАЯ РОЛЬ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Введение. На протяжении всей истории человечества математика является частью человеческой культуры, ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса, существенным элементом формирования личности.

Математическое образование, как и всякое иное, складывается из трех основных компонентов: обучения, воспитания и развития.

Конкретные математические знания пригодятся для ориентации в окружающем мире, для подготовки к будущей профессиональной деятельности (ибо ныне фактически ни одна область человеческой деятельности не может обходиться без математики), для продолжения образования. Но математическое образование предполагает усвоение не только определенной суммы знаний, но и формирование системы математических методов (приемов) мышления. Каждый человек должен освоить навыки логического и алгоритмического мышления, научиться анализировать, отличать гипотезу от факта, критиковать, понимать смысл поставленной задачи, схематизировать, отчетливо выражать свои мысли. С другой стороны, нужно развить воображение и интуицию, пространственное воображение, способность предвидеть результат и предугадать путь решения. Всему этому можно и нужно учить на занятиях по математике, особенно сегодня, когда в Республике Беларусь осуществляется переход на профильное обучение на III ступени общеобразовательной школы. Факты улетучиваются, а развитие остается. Такова судьба значительной части знаний, полученных в школе. Таким образом, ознакомление с математическими фактами, разбор и усвоение математических теорем, вывод формул, решение значительного количества упражнений развивают способности человека и оказывают известное влияние на формирование его личности.

В данной статье предлагаются некоторые задачи и упражнения курса по выбору «Множества и операции над ними», способствующие, на наш взгляд, развитию таких компонентов математических способностей учащихся, как гибкость мышления, логическое мышление, пространственное воображение, абстрагирование и математическая интуиция. С содержанием указанного курса по выбору можно ознакомиться на сайте http://www.nie.by Национального института образования Республики Беларусь.

Основная часть. Теория множеств представляет фундамент, на котором математика строит свое здание. Она дает универсальный аппарат для всей математики. «Почти каждая конкретная область современной математики или постоянно пользуется конкретными методами теории множеств, или же, что с принципиальной точки зрения еще важнее, определяет самый предмет своих исследований как некоторое множество объектов, удовлетворяющих известной системе соотношений», – писал известный русский математик П.С.Александров.

Теоретико-множественные понятия достаточно давно используются в школьном курсе математики. Однако целостного и взаимосвязанного изложения элементарных понятий теории множеств для учащихся общеобразовательных школ не имеется, за исключением классов с углубленным уровнем изучения математики [1]. Недостаточно в школьных учебниках математики имеется и задач, демонстрирующих теоретико-множественные операции в школьном курсе математики. А ведь язык теории множеств позволяет взглянуть с более общих позиций на такие важные разделы школьного курса математики, как решение уравнений, неравенств. Такие понятия, как система уравнений и неравенств, совокупность уравнений и неравенств, получают естественное истолкование на языке теории множеств.

Последовательное и доступное изложение курса «Множества и операции над ними» не является сложным. Этот материал обладает достаточной иллюстрированностью и отражает глубокую и обширную связь математики с реальным миром, в связи с чем изложение понятий теории множеств в старших классах, как показывает опыт, вызывает повышенный интерес и, как правило, легко усваивается.

В своем исследовании мы исходим из того, что при изучении курса по выбору «Множества и операции над ними» есть достаточно возможностей для своевременного выявления и успешного развития математических способностей у школьников, которые интересуются математикой и выбрали естественно-математический профиль обучения.

Проблема развития математических способностей как составной части общих способностей всегда интересовала математиков, педагогов, методистов. Согласно В.А.Крутецкому, способности – это не навыки и умения, а индивидуально-психологические особенности, от которых зависит легкое и успешное овладение умениями и навыками в соответствующей деятельности. [2, с. 79].

Мы опираемся на пятикомпонентную структуру математических способностей, предложенную С.А.Гуцановичем [3, с. 28], содержащую следующие компоненты: абстрагирование, пространственное воображение, математическая интуиция, гибкость мышления, логическое мышление.

Предлагаемый авторами курс по выбору «Множества и операции над ними» преследует следующие цели и задачи: формирование у учащихся знаний о простейших элементах теории множеств и отношений; формирование у них умения свободно ими оперировать; развитие математической культуры учащихся. Кроме названных образовательных целей и задач, данный курс по выбору способствует развитию математических способностей учащихся.

Остановимся более подробно на возможностях развития компонентов математических способностей при помощи предложенного курса по выбору. Охарактеризуем сущность каждого компонента математических способностей.

Слово абстракция, в самом широком смысле, означает возможность рассмотрения предметов и процессов с какой-либо одной точки зрения и отвлечения от других сторон, моментов и обстоятельств. В окружающем мире все предметы и явления находятся в различных взаимосвязях и отношениях друг с другом. Одни из них имеют существенный, устойчивый характер, другие – несущественный, случайный. Для того чтобы понять сущность явлений объективного мира необходимо отделить существенные связи от несущественных, отвлечься от второстепенных обстоятельств, в чем и состоит процесс абстрагирования. В связи с этим развитие такого компонента математических способностей, как абстрагирование играет ведущую роль при обучении математике.

Предложенный авторами курс по выбору «Множества и операции над ними» в наибольшей степени способствует развитию этого компонента. При изучении данного курса происходит отвлечение не только от конкретной природы объектов, но и от конкретных зависимостей между ними. Само по себе понятие множество является достаточно абстрактным.

Во многих вопросах приходится рассматривать некоторую совокупность элементов как единое целое. Так, биолог, изучая животный и растительный мир данной области, классифицирует все особи по видам, виды по родам и т.д. Каждый вид является некоторой совокупностью живых существ, рассматриваемой как единое целое.

Для математического описания таких совокупностей и было введено понятие множества. По словам одного из создателей теории множеств – немецкого математика Георга Кантора, «множество есть многое, мыслимое нами как единое». Из этих слов ясно, что можно говорить о множестве натуральных чисел, множестве треугольников на плоскости.

Объекты рассматриваются не по отдельности, а в совокупности. Происходит абстрагирование от конкретных величин, рассматриваются множества объектов, а не объекты в отдельности, производятся операции над множествами в целом.

Развитию указанного компонента структуры математических способностей учащихся способствует, на наш взгляд, рассмотрение упражнений и задач следующего типа.

Упражнение 1. Решите систему

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

где *A*, *B*, *C* – множества, причем $B \subset A \subset C$.

Решение. На рисунке 1 приведена модель ситуации $B \subset A \subset C$.

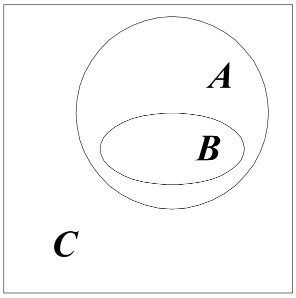


Рис. 1

Поскольку $A \setminus X = B$, $B \subset A$, то $X = (A \setminus B) \cup D$, где множество D такое, что $D \cap A = \varnothing$.

Из того, что $A \cup X = C$, $A \subset C$, следует соотношение $X = (C \setminus A) \cup E$, где множество *E* такое, что $E \subset A$.

Сравнив равенства $X = (A \setminus B) \cup D$ и $X = (C \setminus A) \cup E$, можно сделать вывод, что $E = (A \setminus B)$, а $D = (C \setminus A)$.

Окончательно получаем: $X = (C \setminus A) \cup (A \setminus B) = C \setminus B$.

Задача 1. Как с помощью двух колышков и веревок привязать козу, чтобы она могла есть траву лишь на части луга, ограниченной двумя дугами окружности (рис. 2)?

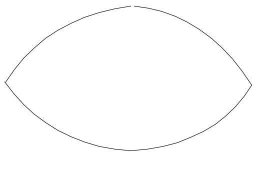


Рис. 2

Задача 2. Как с помощью трех колышков, колечка и веревок привязать козу, чтобы она могла есть траву лишь на части луга, имеющей форму полукруга?

Рассмотрим второй компонент математических способностей – пространственное воображение. Его можно рассматривать как динамичное отображение разных математических объектов в необходимых сочетаниях и связях. Уровень развития пространственного воображения характеризуется умением мысленно представить в пространстве или, как частный случай, на плоскости, взаимное размещение различных элементов геометрических фигур, отображение на чертеже, или их свойства.

Развитию пространственного воображения при изучении предложенного курса по выбору способствуют, на наш взгляд, упражнения на нахождение множеств точек плоскости, задаваемых неравенством с одной или двумя переменными, а также упражнения, где используется геометрический смысл системы алгебраических неравенств.

Приведем некоторые из таких упражнений.

Упражнение 2. Постройте множество точек плоскости, аналитическим заданием которого является следующая система неравенств:

а) $\begin{cases} y \le 1, \\ y < 2 - \dfrac{1}{2}x^2, \\ y > x^2 - 4, \\ x^2 + y^2 \ge 1; \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} |x| + |y| \ge 4, \\ x^2 + y^2 \le 16. \end{cases}$

Решение.

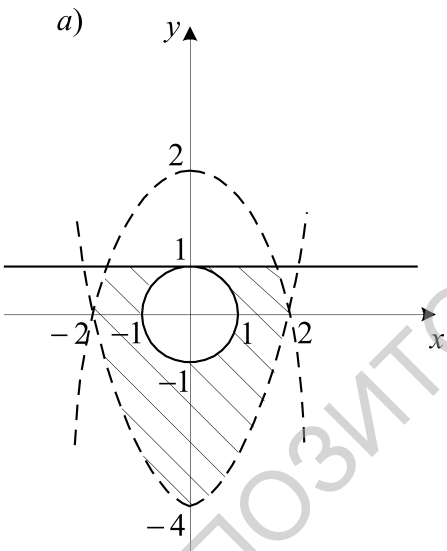


Рис. 3

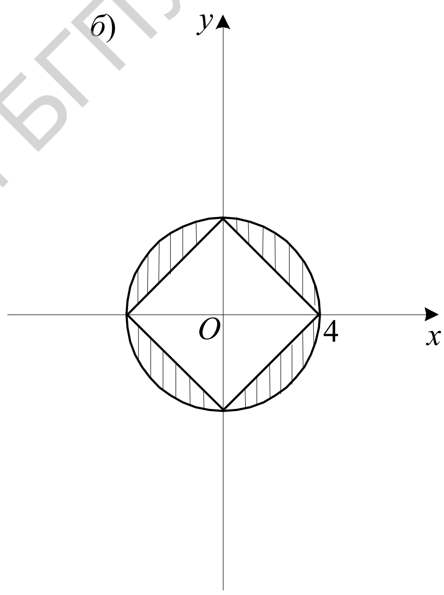


Рис. 4

Для углубления можно предложить упражнения на решение так называемых обратных задач. Имеем в виду упражнения, в которых по данному множеству прямой или плоскости требуется составить его аналитическое задание (эти упражнения целесообразны и для развития гибкости мышления).

Упражнение 3. Задайте аналитически множество точек плоскости, изображенное на рисунке 5.

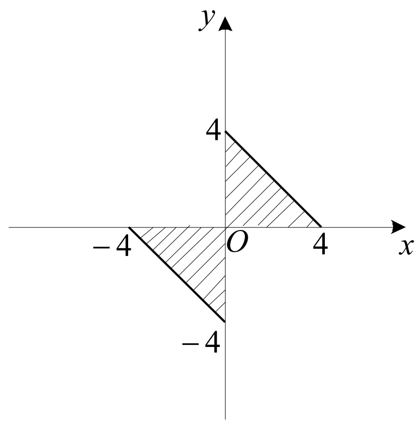


Рис. 5

Решение. Множество точек первой координатной четверти задается условием

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

множество точек третьей координатной четверти задается условием

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$$

Легко понять, что неравенство $xy \geq 0$ выполняется для точек первой и третьей четверти и притом только для них.

Из точек первой и третьей координатных четвертей нашему множеству принадлежат те и только те, которые лежат между прямыми $y = -x - 4$ и $y = -x + 4$, что выражается следующим двойным неравенством:

$$-x - 4 \leq y \leq -x + 4.$$

Таким образом, наше множество определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} xy \geq 0, \\ -x - 4 \leq y \leq -x + 4, \end{cases}$$

иначе

$$\begin{cases} xy \geq 0, \\ |x + y| \leq 4. \end{cases}$$

Упражнение 4. Задайте аналитически множество точек плоскости, изображенное на рисунке 6.

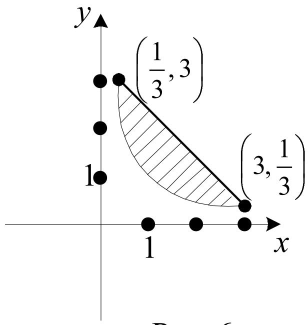


Рис. 6

Решение. Это множество точек задается следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{1}{x} \le y \le -x + \dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Рассмотренные упражнения 2 – 4 (знакомство с множеством решений системы линейных неравенств) дает учителю возможность продемонстрировать применение этой теории к решению практических задач оптимального использования наличных ресурсов. Речь идет о так называемом методе линейного программирования, сущность которого можно пояснить на следующей задаче.

Задача 3. Некоторое производство выпускает продукцию двух видов: $П_1$ и $П_2$. Изготавливается она из четырех видов сырья: S_1, S_2, S_3 и S_4. Запас сырья и расход его на единицу каждого вида продукции задается таблицей 1.

Таблица 1

Вид сырья	**Запас сырья**	**Расход сырья на единицу продукции вида**	
		$П_1$	$П_2$
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0

Доход производства от единицы продукции вида $П_1$ равен 7 денежным единицам, а от единицы продукции вида $П_2$ – 5 денежным единицам.

Как следует спланировать выпуск продукции, чтобы доход предприятия был наибольший?

Особенно направлена на формирование пространственных представлений и развитие исследовательских способностей школьников следующая задача.

Задача 4. Пусть на четыре завода $З_1$, $З_2$, $З_3$ и $З_4$ требуется завести сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах C_1 и C_2. Потребность данных заводов в сырье каждого вида и расстояние от склада до завода указаны в таблицах 2, 3. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, то есть такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее [4].

Таблица 2

Наличие сырья на складе (т)		**Потребность в сырье на заводе (т)**			
C_1	C_2	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
20	25	8	10	12	15

Таблица 3

Склад	**Расстояние от склада до завода (км)**			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
C_1	5	6	4	10
C_2	3	7	3	7

Решение. Проанализируем условие задачи и переведем его на язык математики, то есть составим математическую модель. Количество сырья, которое нужно перевезти со склада C_1 на заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$ обозначим через *x*, *y* и *z* соответственно. Тогда на четвертый завод с этого склада нужно будет перевезти $20-x-y-z$ сырья в тоннах, а со второго склада нужно будет перевезти соответственно $8-x$, $10-y$, $12-z$, $x+y+z-5$.

Эти данные запишем в таблицу 4.

Таблица 4

Склад	**Количество сырья, перевезенное на заводы (т)**			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
C_1	x	y	z	$20-x-y-z$
C_2	$8-x$	$10-y$	$12-z$	$x+y+z-5$

Все величины, входящие в таблицу 4, должны быть неотрицательны, поэтому получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, \\ 8-x \ge 0, 10-y \ge 0, 12-z \ge 0, \\ 20-x-y-z \ge 0, \\ x+y+z-5 \ge 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Система неравенств (1) определяет некоторый многогранник. Изобразим сначала многогранник, определяемый первой и второй строками системы (1). На рисунке 7 это параллелепипед $OABCO_1A_1B_1C_1$. Уравнение $20 - x - y - z$ определяет плоскость $D_1D_2D_3$, пересечением которой с параллелепипедом является многоугольник $M_1M_2M_3C_1$.

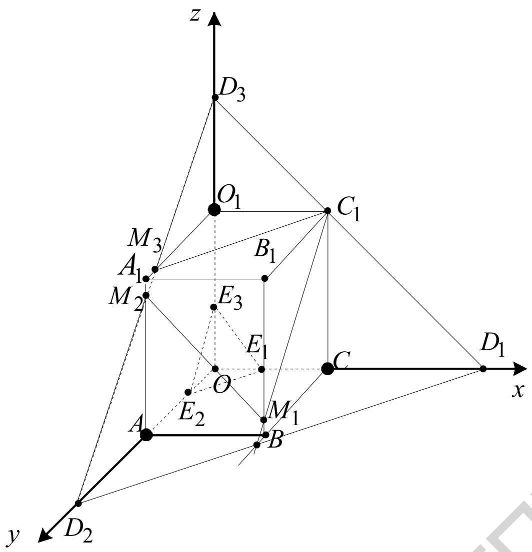


Рис. 7

Уравнение $x + y + z - 5 = 0$ определяет плоскость, пересечением которой с параллелепипедом является треугольник $E_1E_2E_3$. На многограннике $M_1M_2M_3C_1CBAE_2E_1E_3O_1$, где $M_1(8;10;2)$, $M_2(0;10;10)$, $M_3(0;8;12)$, $C_1(8;0;12)$, $C(8;0;0)$, $B(8;10;0)$, $A(0;10;0)$, $E_1(5;0;0)$, $E_2(0;5;0)$, $E_3(0;0;5)$, $O_1(0;0;12)$, выполняются все условия системы (1). Назовем его многогранником ограничений.

Для нахождения общего числа тонно-километров умножим расстояние от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты сложим:

$$5x + 6y + 4z + 10(20 - x - y - z) + 3(8 - x) + 7(10 - y) +$$
$$+ 3(12 - z) + 7(x + y + z - 5) = 295 - x - 4y - 2z.$$

Следовательно, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 295 - x - 4y - 2z$ на многограннике ограничений. Достаточно найти наибольшее значение функции $f = x + 4y + 2z$. Тогда $F_{\min} = 295 - f_{\max}$.

Используя геометрические соображения, докажем, что линейная функция вида $ax + by + cz$ $(c > 0)$ принимает наибольшее значение на многограннике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение d функции $ax + by + cz$. Тогда уравнение $ax + by + cz = d$ определяет в пространстве плоскость, которая характеризуется тем, что во всех ее точках данная линейная функция принимает значение d. В точках, расположенных выше этой плоскости, она принимает значения, большие d, в точках, расположенных ниже этой плоскости – значения, меньшие d.

Пусть число d достаточно большое, тогда плоскость $ax+by+cz=d$ расположится выше многогранника. Будем опускать эту плоскость, уменьшая значения d, пока она не соприкоснется с многогранником. Такое касание произойдет при некотором d_0 – в какой-нибудь вершине многогранника (рис. 8), или по какому-нибудь его ребру, или по какой-нибудь его грани.

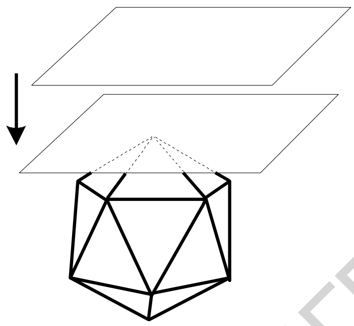


Рис. 8

В точках касания линейная функция принимает значение d_0, и поскольку все остальные точки многогранника лежат ниже плоскости, значения линейной функции в этих точках меньше d_0. Следовательно, d_0 – искомое наибольшее значение.

Таким образом, для нахождения наибольшего значения линейной функции на многограннике достаточно вычислить значение функции в вершинах многогранника и выбрать из них наибольшее.

Имеем:

$$f(M_1)=52,\ f(M_2)=60,\ f(M_3)=56,\ f(C_1)=32,\ f(C)=8,$$

$$f(B)=48,\ f(A)=40,\ f(E_1)=5,\ f(E_2)=20,\ f(E_3)=10,\ f(O_1)=24.$$

Видим, что максимальное значение функции f равно 60. Тогда $F_{\min}=295-60=235$. Это значение функция F принимает в точке $M_2(0;10;10)$.

Наиболее выгодный вариант перевозок задается следующей таблицей 5:

Таблица 5

Склад	**Количество сырья, перевезенное на заводы (т)**			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
C_1	0	10	10	0
C_2	8	0	2	15

Перед решением задачи 4 учителю целесообразно рассмотреть ряд задач на построение сечений многогранников, которые базируются на теоретико-множественных принципах, способствуют развитию пространственного воображения учащихся и носят пропедевтический характер для задачи 4, а также для изучения школьниками стереометрии.

Задача 5. Постройте сечение треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки *B, N, P* (рис. 9).

Задача 6. Дано: $M \in AB$, $N \in AD$, $P \in DC$ (рис. 10). Постройте сечение.

Задача 7. Дано: $K \in DC$, $M \in ABC$, $N \in ACD$ (рис. 11). Постройте сечение плоскостью MNK.

Задача 8. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки *X, У, Z* (рис. 12).

Задача 9. Дано: AC_1 – параллелепипед; $M \in B_1C_1$, $P \in C_1C$, $E \in AB$ (рис. 13). Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки *M, P, E*.

Задача 10. Дано: AC_1 – куб; $M \in A_1A$, $N \in A_1B_1$, $P \in B_1C_1$ (рис. 14). Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки *M, N, P*.

Решение.

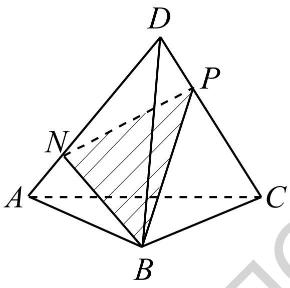


Рис. 9

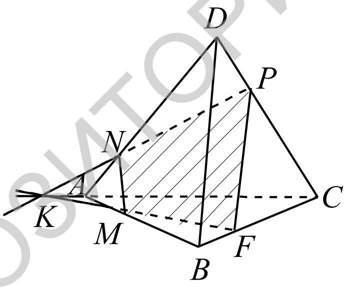


Рис. 10

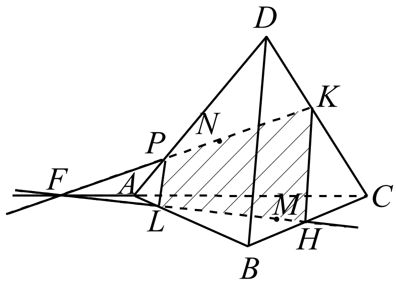


Рис. 11

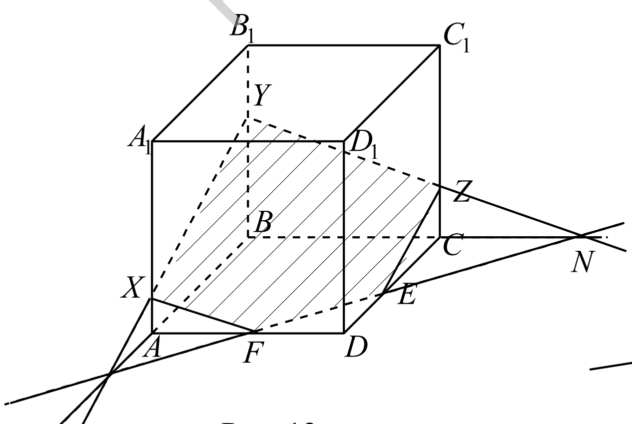


Рис. 12

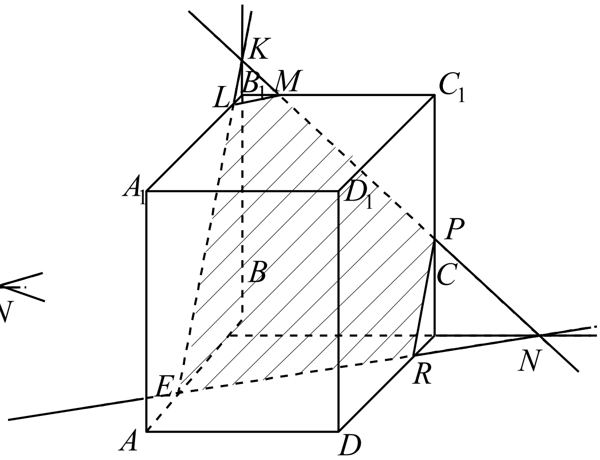


Рис. 13

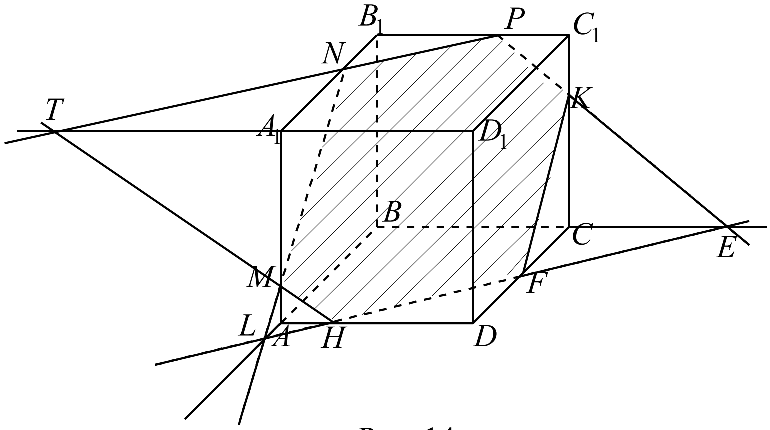


Рис. 14

Развитию пространственного воображения школьников способствует и изучение ими графического метода решения задач с параметрами (метод областей), который непосредственно связан с рассматриваемым в данной статье курсом по выбору.

Упражнение 5. Для всех значений параметра *p* решите неравенство

$$(p-x^2)(p+x-2)<0. \qquad (2)$$

Решение. В координатной плоскости переменных *x* и *p* изобразим множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству (2). В подобных ситуациях принято в начале на первом шаге изображать границы областей, то есть точки $M(x, p)$, для которых левая часть неравенства (2) равна нулю.

$$(p-x^2)(p+x-2)=0 \Leftrightarrow p-x^2=0 \text{ или } p+x-2=0 \Leftrightarrow p=x^2 \text{ или } p=2-x.$$

Первое равенство в плоскости (x, p) задает параболу, а второе – прямую Как парабола, так и прямая разбивают координатную плоскость (x, p) на две области. Для всех точек каждой области соответствующий множитель левой части неравенства (2) ($p-x^2$ для параболы и $p+x-2$ для прямой) имеет фиксированный знак, который нам и необходимо в дальнейшем определить.

Парабола и прямая в зависимости от взаимного расположения разбивают плоскость на области в количестве от трех до пяти. Для выявления конкретной ситуации необходимо найти общие точки параболы и прямой или доказать, что они не существуют, то есть в данном случае решить систему уравнений

$$\begin{cases} p-x^2=0, \\ p+x-2=0. \end{cases}$$

Очевидно, что данная система имеет два решения, то есть определяет две точки, в которых прямая пересекает параболу. Таким образом, получаем пять различных областей (рис. 15).

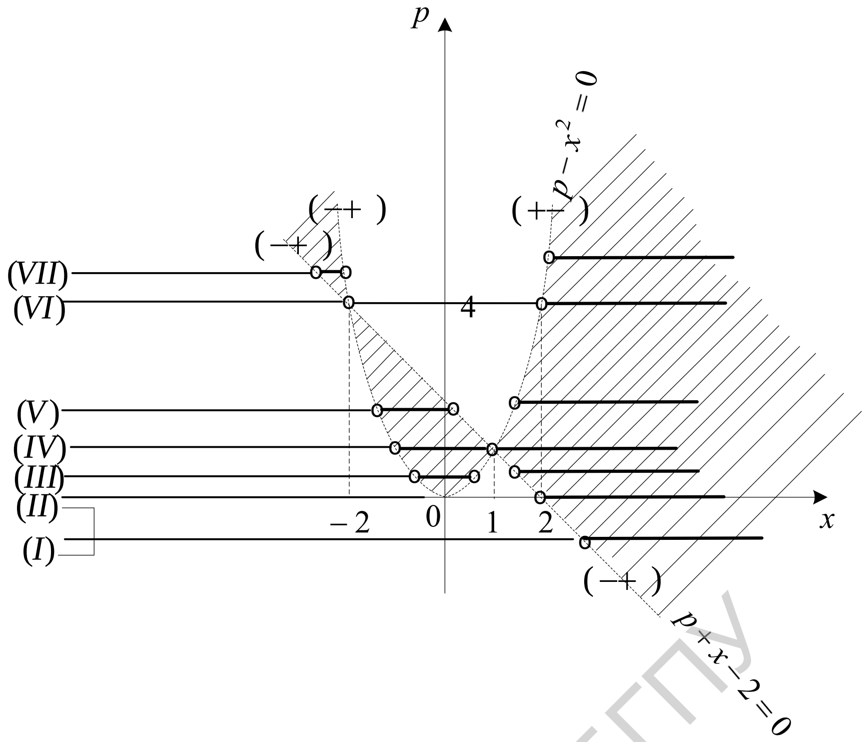


Рис. 15

Второй шаг – определение знака в областях. Существуют два основных способа определения знака множителя (или всего произведения):

– способ прямого определения путем вычисления значения множителя для координат выбранной точки из данной области;

– аналитический способ.

Очевидно, зная знаки множителей в каждой точке плоскости, легко определить знак произведения и изобразить множество A всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству (2) (см. заштрихованную часть на рис. 15).

Поскольку в нашем примере все значения параметра p являются допустимыми, то для любой ординаты p_0 нам необходимо указать абсциссы точек пересечения прямой $p = p_0$ с множеством A либо объявить, что таковых не существует.

Таким образом, указав все абсциссы точек пересечения, мы тем самым закончим решение: если $p<0$, то $x\in(2-p;+\infty)$; если $p=0$, то $x\in(2;+\infty)$; если $0<p<1$, то $x\in(-\sqrt{p};\sqrt{p})\cup(2-p;+\infty)$; если $p=1$, то $x\in(-1;1)\cup(1;+\infty)$; если $1<p<4$, то $x\in(-\sqrt{p};2-p)\cup(\sqrt{p};+\infty)$; если $p=4$, то $x\in(2;+\infty)$; если $p>4$, то $x\in(2-p;-\sqrt{p})\cup(\sqrt{p};+\infty)$.

Развитию пространственного воображения способствует и решение геометрических задач на построение.

Действительно, решая их, ученики приобретают следующие качества: во-первых, способность отчетливо представлять себе пространственные геометрические образы и, во-вторых, умение мысленно выполнять операции над воображаемыми геометрическими линиями, фигурами, поверхностями и телами.

Геометрические задачи на построение, развивая пространственное воображение, облегчают учащимся изучение химии, физики. Так, обладая хорошими пространственными представлениями, учащиеся при изучении химии отчетливо понимают структуру атомов и молекул химических элементов и сложных соединений, рисуют в своем воображении протекание химических процессов. Хорошие пространственные представления помогают ученикам при изучении физики вникать в суть физических явлений, представлять в своем воображении, какой вид примет явление при изменении вызывающих его условий.

Геометрические задачи на построение приучают учеников проявлять инициативу, изобретательность, настойчивость в достижении намеченной цели, а также приучают учащихся логически рассуждать.

Для решения геометрических задач на построение существует несколько методов (метод геометрических мест, метод параллельного переноса, метод симметрии, метод спрямления, метод подобия, метод обратности, алгебраический метод).

Содержание предлагаемого авторами курса по выбору позволяет рассмотреть метод геометрических мест. Термин «геометрическое место» означает, по существу, то же самое, что и термин «множество». С пересечением множеств мы сталкиваемся довольно часто. Метод геометрических мест есть не что иное, как отыскание пересечения множеств.

Геометрическим местом точек, удовлетворяющих заданному условию (сокращенно ГМТ), принято называть множество, содержащее все точки, удовлетворяющие этому условию, но не содержащее больше никаких других точек. Метод геометрических мест состоит в следующем. Требуется найти некоторую точку, удовлетворяющую двум независимым условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих только первому условию, есть некоторая фигура Φ_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих только второму условию, есть некоторая фигура Φ_2. Ясно, что обоим условиям удовлетворяет каждая точка пересечения фигур Φ_1 и Φ_2, а всякая точка, не принадлежащая пересечению этих фигур, не удовлетворяет хотя бы одному из этих условий. Каждая точка фигуры $\Phi_1 \cap \Phi_2$ дает возможность найти некоторое решение задачи. Рассмотрим конкретную задачу, решаемую методом геометрических мест.

Задача 11. На периметре данного треугольника *ABC* найти точку, равноудаленному от данных точек *M* и *N* [5, с. 49].

Решение. *Анализ.* Допустим, что задача решена и точка D является искомой (рис. 16).

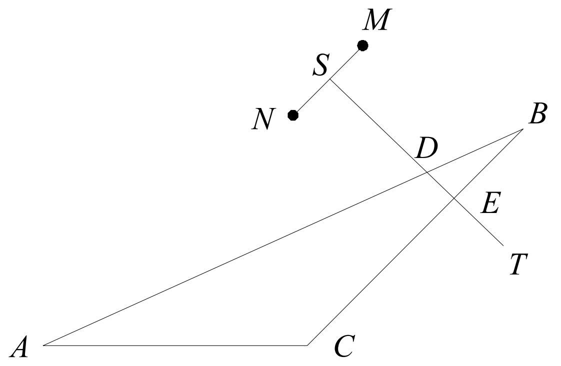


Рис. 16

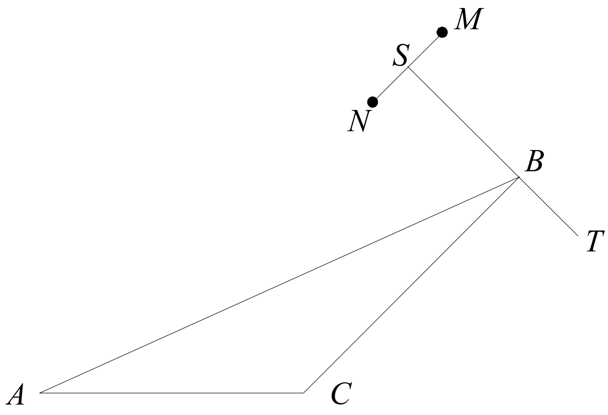


Рис. 17

Чтобы точка D была равноудалена от точек M и N, она должна находиться на перпендикуляре ST, восстановленном из середины S отрезка MN. Те точки (D и E), в которых прямая ST пересечет периметр ΔABC, являются искомыми.

Построение. 1) Соединим точки M и N. 2) Восстановим в середине отрезка MN перпендикуляр ST к этому отрезку. 3) Точки D и E, в которых прямая ST пересечет периметр ΔABC, являются искомыми.

Доказательство. Точки D и E находятся на перпендикуляре ST, восстановленном из середины S отрезка MN, следовательно, они равноудалены от точек M и N. Но точки D и E лежат также на сторонах треугольника, следовательно, они являются искомыми, так как удовлетворяют всем требованиям условия задачи.

Исследование. При рассмотренном нами (рис. 16) положении точек M и N и ΔABC прямая ST пересекла периметр ΔABC в двух точках: D и E, и, значит, задача имеет в этом случае два решения.

Но если взять иной треугольник или изменить положение точек M и N, то может оказаться (рис. 17), что прямая ST проходит через его вершину и не пересекает его плоскости, а потому имеет с периметром данного треугольника только одну общую точку. В этом случае задача имеет одно решение (рис. 17).

Перпендикуляр, восстановленный из середины отрезка MN, может не иметь ни одной общей точки с периметром данного треугольника ABC, как это показано на рисунке 18.

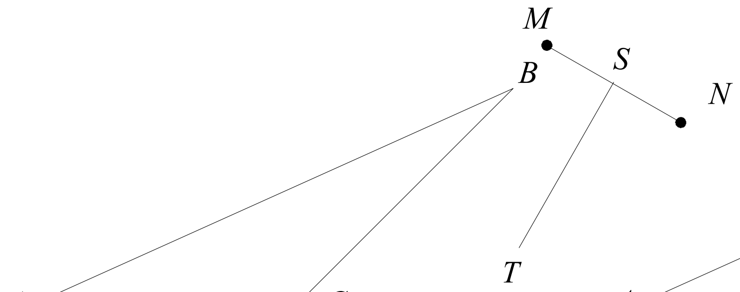


Рис. 18

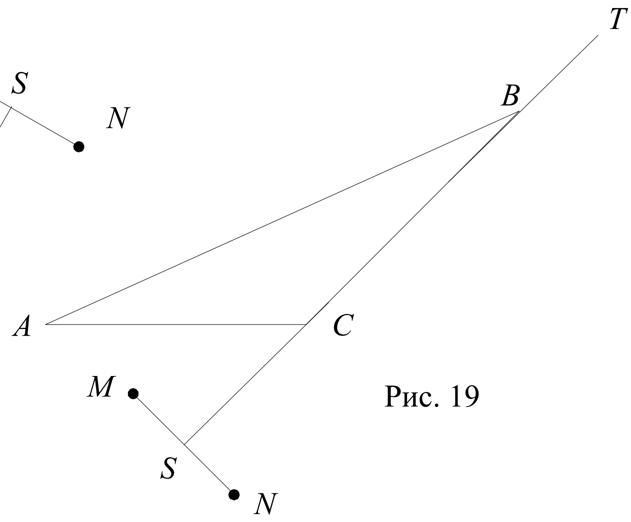


Рис. 19

Если же окажется, что одна из сторон данного треугольника совпадает с прямой ST (рис. 19), то любая точка этой стороны BC является искомой, и, следовательно, в этом случае задача имеет бесконечное множество решений.

Следующим рассматриваемым компонентом в структуре математических способностей является интуиция. Интуиция в различной степени присутствует в любой деятельности. Интуиция – это способ непосредственного отображения действительности, при котором результат основывается главным образом на догадке. Математическая деятельность имеет свою специфику, поэтому в процессе мышления интуитивные аспекты приобретают некоторые особенности.

При изучении курса по выбору «Множества и операции над ними» решение многочисленных примеров основано на догадке, выборе хода решения, что в свою очередь способствует развитию интуиции. Рассмотрим несколько примеров, которые в некоторой степени направлены на развитие математической интуиции.

Упражнение 6. Угадайте, по какому закону составлено бесконечное множество, содержащее числа:

а) $\left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \ldots\right\}$;

б) $\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{8}, \frac{6}{11}, \frac{8}{14}, \ldots\right\}$;

в) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \ldots\right\}$;

г) $\left\{\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23}, \ldots\right\}$;

д) $\{2, 12, 36, 80, 150, \ldots\}$.

Задача 12. Дан квадрат со стороной *a*. Найти площадь фигуры, являющейся пересечением кругов радиуса *a* с центром в вершинах данного квадрата.

Решение. Дуги окружностей разбивают квадрат на девять частей. Равные площади обозначим одинаковыми буквами *x, y* и *z* (рис. 20).

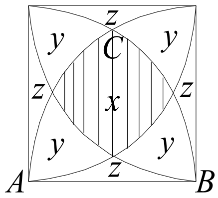


Рис. 20

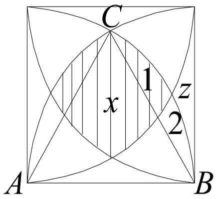


Рис. 21

Площадь квадрата равна $x+4y+4z$, или a^2, то есть справедливо равенство $x+4y+4z=a^2$.

Соединим точки A и C, B и C (рис. 21). Выразим сумму площадей фигур 1 и 2 двумя способами, используя площади секторов, составляющих $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{12}$ площади круга радиуса *a*, и площадь равностороннего треугольника. Получим еще одно уравнение:

$$\frac{\pi a^2}{6}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi a^2}{12}-(y+z).$$

Из первого уравнения выразим $y+z$ и подставим полученное выражение $\frac{a^2-x}{4}$ во второе уравнение, из которого найдем *x*:

$$x=\left(1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)a^2.$$

Курс по выбору «Множества и операции над ними» предоставляет большие возможности для развития еще одного компонента математических способностей – логического мышления. Данный компонент характеризуется умением выводить результаты из данных предпосылок, вычленять частные случаи из некоторого общего положения, теоретически предсказывать конкретные случаи, обобщать полученные выводы и т.д. Логическое мышление проявляется и развивается у учащихся в ходе различных выводов: индуктивных и дедуктивных, при доказательстве теорем и др.

Развитию данного компонента в значительной степени способствует, на наш взгляд, решение задач следующего типа: докажите, что при любых множествах *A*, *B* и *C* справедливы равенства:

а) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

б) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

в) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B;$

г) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$

Понятие «гибкости мышления» в сфере психолого-педагогических наук рассматривают в своих работах Д.Н.Богоявленский, В.А.Круцецкий, Н.А.Менчинская, М.В.Метельский и др. В отечественной психологии наиболее полным можно считать понятие гибкости мышления, введенное Н.А. Менчинской. Она считает, что гибкость мышления проявляется в целесообразном варьировании способов действия, в легкости перестройки уже имеющихся знаний и перехода от одного действия к другому [6].

Гибкость проявляется в умении видеть новое в известном, выделять существенное, выступающее в скрытой форме.

Математика как учебный предмет является существенной областью знаний, которая позволяет развивать гибкость мышления. Для развития гибкости мышления следует: применять упражнения, в которых встречаются взаимно обратные операции; решать задачи несколькими способами, доказывать теоремы различными методами; применять переформулировки условия задачи; учить переключению с прямого хода мыслей на обратный; учить тому, какие знания, умения, навыки и в каком порядке применять в конкретной задаче и т.д.

Параллельно должна осуществляться деятельность по развитию глубины мышления, для чего надо учить: выделять главное в задаче; выделять существенные признаки понятия; вычленять ведущие закономерности отношений явлений; отделять главное от второстепенного; уметь извлекать из текста не только то, что там сказано прямо, но и то, что содержится «между строк»; выделять главные причины происходящего, объяснять их сущность и т.д.

На наш взгляд, развитию данного компонента математических способностей школьников в некоторой степени способствуют следующие задачи и упражнения рассматриваемого курса по выбору.

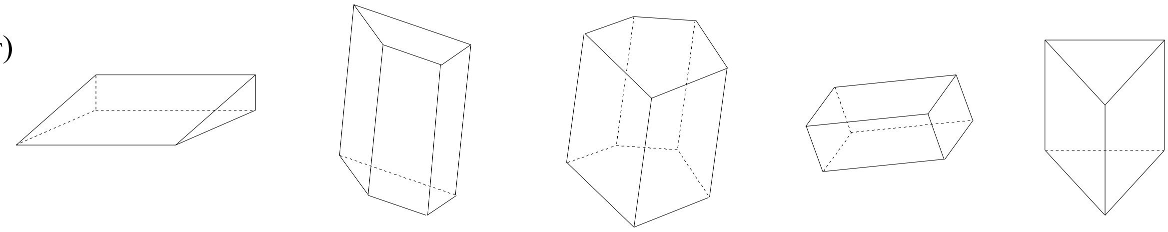
Упражнение 7. В следующих множествах все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством:

а) {Евклид,Пифагор,Декарт,Ферма,Колумб};

б) {9,18,27,45,161};

в) {2,3,23,39,11,17};

г)



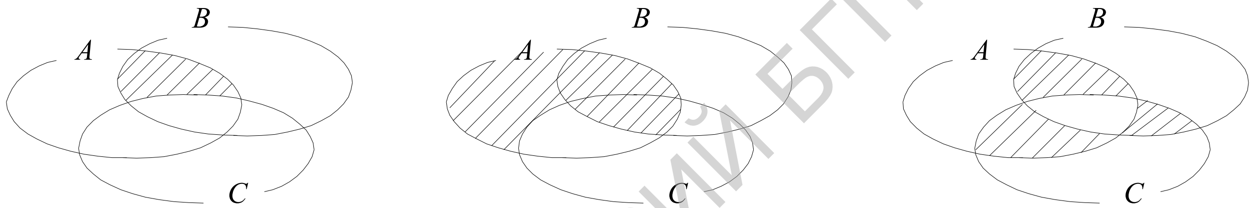
1) 2) 3) 4) 5)

д) $\{11,121,55,572,21,88\}$;

е) $\{3,17,10,22,24\}$.

Укажите этот элемент.

Упражнение 8. На диаграмме Эйлера-Венна (рис. 22) множество *M* заштриховано. Запишите с помощью операций над множествами выражение множества *M* через множества *A*, *B* и *C* по крайней мере двумя различными способами.



а) б) в)

Рис. 22

Развитию данного компонента способствует и решение задач на нахождение числа элементов конечных множеств.

Задач 13. В олимпиаде по математике принимало участие 40 учащихся, им было предложено решить одну логическую задачу, одну задачу по комбинаторике и одну – по математическому анализу. Результаты проверки ответов дали следующие результаты:

Таблица 6

Получены правильные ответы на вопросы	**Количество ответивших**
по логике	20
по комбинаторике	18
по математическому анализу	18
по логике и комбинаторике	7
по логике и математическому анализу	8
по комбинаторике и математическому анализу	9

Известно также, что трое не дали правильных ответов ни на один вопрос. Сколько учащихся правильно ответило на все три вопроса?

Решение. I способ. С помощью кругов Эйлера-Венна данную задачу можно проиллюстрировать следующим образом (рис 23):

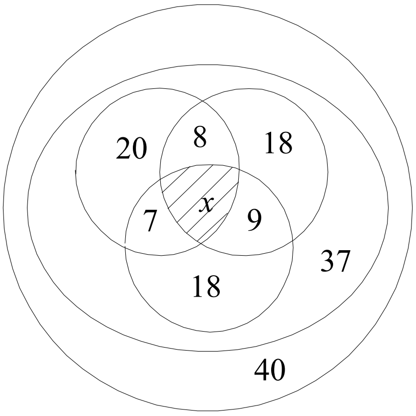


Рис. 23

Из рисунка 23 видно, что для нахождения числа элементов искомой области нужно

$$37-(20+18+18-7-9-8).$$

Таким образом, получаем, что 5 учащихся правильно ответило на все три вопроса.

II способ. Пусть U – множество всех учащихся; A – множество учащихся, правильно ответивших на вопросы по логике; B – множество учащихся, правильно ответивших на вопросы по комбинаторике; C – множество учащихся, правильно ответивших на вопросы по математическому анализу; D – множество учащихся, не давших ни одного правильного ответа. Получим $n(U)=40$, $n(D)=3$, $n(A)=20$, $n(B)=18$, $n(C)=18$ (для конечного множества A через $n(A)$ обозначим число его элементов).

Второй способ решения данной задачи заключается в применении равенства

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C):$$

$$40-3=20+18+18-7-8-9+n(A\cap B\cap C),$$

$$n(A\cap B\cap C)=5.$$

Задача 14. Сколько существует различных обыкновенных правильных несократимых дробей со знаменателем 900?

Решение. Поскольку $900=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2$, то задача сводится к подсчету количества натуральных чисел, не превосходящих 900, не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Посчитаем количество чисел, не удовлетворяющих условию. Используем для наглядности диаграмму Эйлера-Венна (рис. 24).

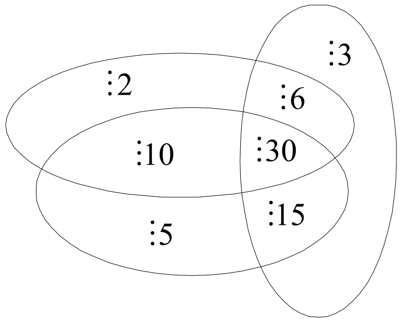


Рис. 24

На 2 делится $900:2=450$ чисел, на 3 делятся $900:3=300$ чисел, на 5 делятся $900:5=180$ чисел. Всего – $450+300+180=930$ чисел.

Числа, делящиеся на два из трех сомножителей, были посчитаны по 2 раза. Таких чисел, делящихся на $2\cdot 3$ – $900:6=150$ чисел, делящихся на $2\cdot 5$ – $900:10=90$ чисел, делящихся $3\cdot 5$ – $900:15=60$ чисел.

Итак, чисел, не удовлетворяющих условию задачи,

$$(450+300+180)-(150+90+60)$$

плюс числа, делящиеся на 2, на 3 и на 5, которые были учтены (а следовательно, вычтены) два раза. Прибавив количество чисел, делящихся на 2, на 3 и на 5 (их $900:(2\cdot 3\cdot 5)=30$), получим

$$(450+300+180)-(150+90+60)+30=660 \text{ чисел.}$$

Количество дробей, удовлетворяющих условию задачи, равно $900-660=240$.

Заключение. Таким образом, курс по выбору «Множества и операции над ними» способствует не только усвоению учащимися определенной суммы знаний о простейших элементах теории множеств и формированию умений свободно ими оперировать, но и развитию математических способностей школьников. Он реализует одну из основных задач профильного обучения: обеспечение реализации разнообразных интересов и потребностей учащихся.

При изучении курса обеспечивается преемственность в содержании образования, методах и формах обучения на завершающей ступени общего среднего образования и первой ступени высшего профессионального образования, осуществляется подготовка к дальнейшему образованию в вузе. Происходит развитие творческих способностей учащихся, формирование системы представлений, ценностных ориентаций, познавательных, предметных и исследовательских умений и компетенций, обеспечивающих выпускнику готовность к продолжению профессионального образования.

Литература

1. Ананченко, К.О. Алгебра. Учебник для 8 класса общеобразовательных школ с углубленным изучением математики / К.О. Ананченко, Н.Т. Воробьев, Г.Н. Петровский. – Минск: Народная асвета, 1994. – 542 с.
2. Крутецкий, В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий; под ред. Н.И. Чуприковой. – М.: Издательство «Институт практической психологии»; Воронеж: Издательство НПО «МОДЭК», 1998. – 416с.
3. Гуцанович, С.А. Дидактические основы математического развития учащихся / С.А. Гуцанович. Монография. – Минск: БГПУ, 1999. – 301с.
4. Смирнова, И. Экстремальные задачи по геометрии / И. Смирнова, В. Смирнов. – М.: Чистые пруды, 2007. – 32с.
5. Орленко, М.И. Решение геометрических задач на построение / М.И. Орленко. – Минск: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения БССР, 1958. – 438 с.
6. Менчинская, Н.А. Проблемы обучения, воспитания и психического развития ребенка: Избр. психол. тр. / Н.А. Менчинская: – М.: Издательство МПСИ; Воронеж: Издательство НПО «МОДЭК», 2004. – 511с.
7. Виленкин, Н.Я. Рассказы о множествах / Н.Я.Виленкин. – 2-е изд. – М: Наука, 1969. – 159с.
8. Нешков, К. И. Множества. Отношения. Числа. Величины / К.И. Нешков, А.М. Пышкало, В.Н. Рудницкая В. Н. – М.: Просвещение, 1978. – 63с.